

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2019
Clasa a VII-a

1. Se consideră expresia $E(n) = \sqrt{(10^n - 2019)^2} - \sqrt{(2018 - 10^n)^2}$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- a) (4p) Determinați valorile expresiei $E(n)$.
- b) (3p) Aflați numerele raționale a și b pentru care $E(n) = \frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1}$, unde $n \geq 4$.
2. Numerele naturale nenule a și b verifică egalitatea $\frac{2020b}{b^2 - 2019} = \frac{2020a + 26260}{a}$.
- a) (3p) Arătați că $0 < b - \frac{2019}{b} < 1$.
- b) (4p) Determinați numerele a și b .
3. (7p) În triunghiul ABC se aleg punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC}$. Dacă punctul P este mijlocul laturii $[AB]$ și punctul Q este mijlocul segmentului $[MN]$, demonstrați că $\frac{AM}{AB} + 2 \cdot \frac{PQ}{BC} = 1$.
4. Pe diagonala $[BD]$ a trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = BC = a$, există punctul E , astfel încât triunghiul ADE este echilateral. Știind că $BE = b$ și $AB \cap CE = \{F\}$:
- a) (4p) Calculați măsurile unghiurilor trapezului și demonstrați că E este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .
- b) (3p) Aflați lungimea segmentului $[AF]$ în funcție de a și b .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.